主題探究

數學之寶－畢氏定理

作者：楊 惠 后
任教於台中市私立曉明女中國中部
2010.08.09

◆ 畢氏定理的發展史

西方：

1955 年希臘發行一套郵票（見圖一）用來紀念二千五百多年前畢達哥拉斯學派發現「畢達哥拉斯定理」，從郵票中很清楚的就可以發現直角三角形的三邊長為 3、4、5，而且其中兩個小正方形的面積和恰為最大的正方形的面積，也就是 $3^2+4^2=5^2$，這就是古今中外家喻戶曉的畢氏定理。

在西方國家，他們普遍相信這個定理是由畢達哥拉斯（B.C.560～480 年）發現的，或者至少是由他證明的；雖然考古紀錄顯示在二千多年前的古埃及文明中，就會使用三邊長為 3、4、5 的繩結在地上繪製直角，用來建造金字塔等建築底部的直角，但是文獻資料未顯示他們是否知道如何證明。

而在 1945 年 *Neugebauer* 等人詮釋一塊巴比倫泥板（見圖二）時，發現巴比倫人在約 B.C.1900～1600 年已經知道至少 15 組的畢氏三元數（滿足 $a^2+b^2=c^2$ 的正整數解），然而也尚未發現跟定理相關的證明。

（圖一）

（圖二）

東方：

那麼在中國呢？有關這個定理的記載，最早是出現在周髀算經（注 1）的趙君卿注中，文中敘述商高（西周大夫，B.C.1100 年）曾經提過「勾廣三、股脩四、徑偶五」，而且商高認為早在大禹治水時期就會利用這個性質了；所以在中國，我們稱這個定理為「商高定理」或「勾股定理」。

◆ 畢氏定理的證明

天文學家刻卜勒曾說過:「畢氏定理與黃金分割是幾何學的兩大寶藏」，其中關於畢氏定理的證明方法目前已知有人收集到 250 種（注 2），有些是嚴密的證明、有些是「拼補相等」的證明；有興趣的讀者可參考本人發表在科學教育月刊第 252 期(民國 91 年 9 月)的「商高定理簡史及證明方法」，共結集 14 種方法；或者也可以在有名的數學網站「昌爸工作坊」操作動態的畢氏定理的證明，提高教學的活潑性。

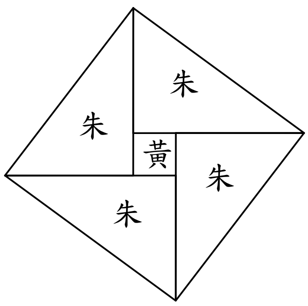
特別強調一下，在所有商高定理的證明中，最簡單也是最巧妙的證明方法，首推魏晉數學家趙君卿（A.D.300～400 年左右）在注中所提到的「弦圖」(見圖三)(原圖已失，後人根據所述補繪)，正式給出了商高定理的證明:「勾股各自乘併之為弦實，開方除之即弦，案弦圖又可以勾股相乘為朱實二，倍之為朱實四，以勾股之差自相乘為中黃實，加差實，亦成弦實。」用現代的方式說明，就是

$$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$$

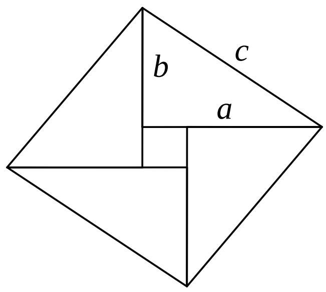
$$\Rightarrow\ c^2=2ab+a^2-2ab+b^2$$

$$\Rightarrow\ c^2=a^2+b^2\qquad\text{（見圖四）}$$

外國人用同樣的方法來證明的是印度數學家 *Bhaskara-Acharya*（A.D.1114～1185 年），比趙君卿晚了數百年。



弦圖　(圖三)

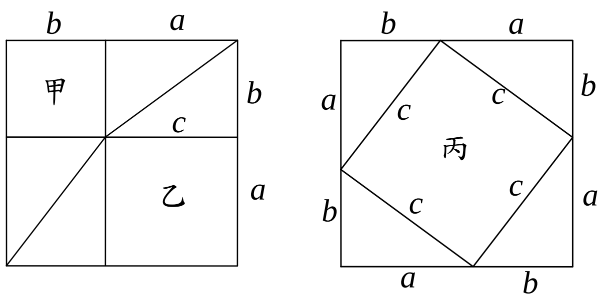


（圖四）

我們再來看看畢氏學派所提供的圖解法也十分地簡潔(見圖五)。我們比較左右兩個邊長均為（$a+b$）的正方形的面積，很輕易地就可以發現：

正方形丙的面積＝正方形甲的面積＋正方形乙的面積

$$c^2\qquad=\qquad a^2\qquad+\qquad b^2$$



（圖五）

◆ 畢氏定理應用於教學

在畢氏定理的延伸教學上，我採取的方式是適時的補充在國二到國三的所有相關課程上，現在簡單分享如下：

（一）、「幾何板」的活動：

1. 學生可以在幾何板（或方格紙上的格子點）上，利用畢氏定理來觀察、發現，哪些型如 $\sqrt{n}$ 的長度在幾何板上是不會出現的？(例如：$\sqrt{3}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、……)
2. 是否在幾何板上可以圍出 30°-60°-90°的直角三角形或正三角形等圖形？
3. 在幾何板上操作諸如方程式 $2x+3y=12$ 與兩坐標軸所圍出的三角形內部的格子點數，或半徑為 5 的圓內的格子點數。(均會利用到畢氏定理來協助篩選)
4. 利用切割的技巧來算出幾何板上任意多邊形的周長或面積。

   這時也可適時的提供皮克公式（*Pick`s formula*）$A=\frac{B}{2}+I-1$ 來巧妙的算出幾何板上的多邊形面積。(有興趣的讀者可參考本人發表在數學傳播季刊第 121 期（民國 96 年 3 月）的「幾何板與 Pick 公式」一文有相關的證明。)

（圖六）

（二）、尋找「畢氏三元數」:(也就是尋找滿足 $a^2+b^2=c^2$ 的正整數解)

由 $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$，學生可利用因數、倍數概念及嘗試錯誤法，發現這些畢氏三元數（3, 4, 5）、（5, 12, 13）、（6, 8, 10）、（7, 24, 25）……。對於有研究興趣的學生，可鼓勵他們試著找出畢氏三元數的一般解：

$$a=x^2-y^2、b=2xy、c=x^2+y^2$$

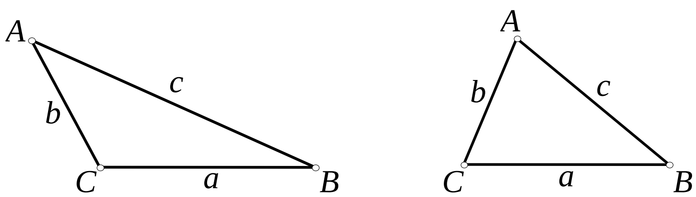
（三）、畢氏定理是一個可逆定理：

利用樞紐定理可知：對於【1】鈍角△ABC，設∠$C>90°$時，則 $c^2>a^2+b^2$；

【2】銳角△ABC，設∠$C<90°$時，則 $c^2<a^2+b^2$。(見圖七)

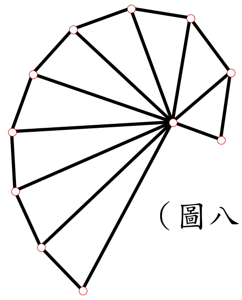
利用逆樞紐定理可知：當 $a^2+b^2=c^2$ 時，則∠$C=90°$，也就是△ABC 一定是直角三角形。

以上就是逆畢氏定理，所以**畢氏定理是一個可逆定理**。



（圖七）

（四）、利用尺規作圖作出 $\sqrt{n}$ 的長度或在數線上找出 $\sqrt{n}$ 的位置，學習過程中都可以讓學生熟捻畢氏定理的操作。（見圖八）


（圖八）

（五）、畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$ 的幾何意義：

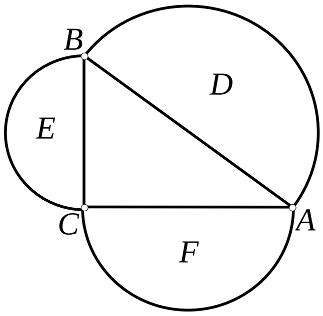
分別由勾、股為邊長的兩個小正方形的面積和，恰為以弦為邊長的大正方形的面積，是一般常見的例子。

然而只要利用等量乘法公理，則其他形狀也可以成立：

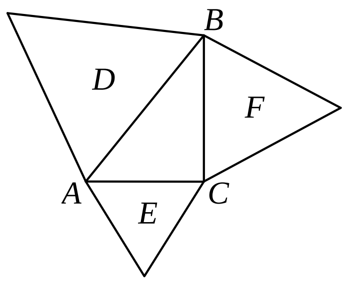
【1】若左右同時乘上 $\dfrac{\pi}{8}$，即可將正方形改為半圓形（見圖九）；

【2】若左右同時乘上 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，也可將正方形改為正三角形（見圖十）。

以上均滿足面積 $D=E+F$ 的關係式。事實上，將正方形改為任意正 n 邊形均成立！



（圖九）



（圖十）

（六）、現在的國三幾何課程已不再強調嚴謹的證明，取而代之的是言簡意賅的說明或圖解法。

在「相似形」這個單元（注 3）：

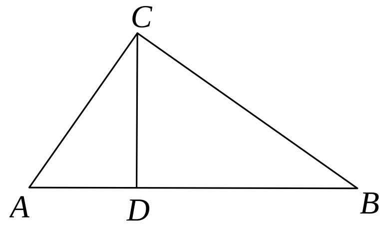
已知 $\angle ACB=90°$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$ （見圖十一）

利用母子直角三角形中的比例線段，可知

$\overline{AC}^2=\overline{AD}\times\overline{AB}$ 且 $\overline{BC}^2=\overline{BD}\times\overline{AB}$

所以 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}\times(\overline{AD}+\overline{BD})=\overline{AB}^2$

這就是畢氏定理。



（圖十一）

在「幾何推理」這個單元（注 4）：

已知 $\overline{PQ}$ 切圓 O 於 Q 點，$\overline{PR}$ 為通過圓心 O 的割線（見圖十二），

利用切割線段性質，可得

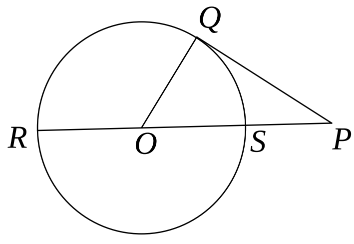
$\overline{PQ}^2=\overline{PS}\times\overline{PR}$

$=(\overline{PO}-\overline{OS})\times(\overline{PO}+\overline{OR})$

$=(\overline{PO}-\overline{OQ})\times(\overline{PO}+\overline{OQ})$

$=\overline{PO}^2-\overline{QO}^2$

這也是畢氏定理。



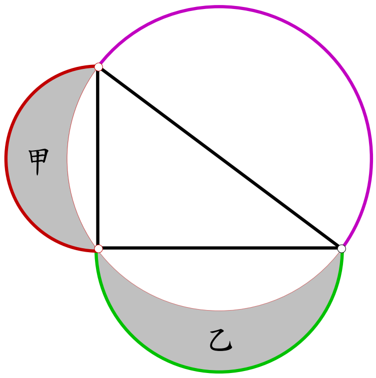
（圖十二）

(七)、希波克拉底斯（*Hippocrates of Chios*）新月形：

利用半圓上的圓周角必為一直角，今將（圖九）中的大半圓以斜邊為對稱軸，作其對稱大半圓（見圖十三)，一定會通過直角三角形的垂足。經由簡單的化簡，可得

新月形甲的面積＋新月形乙的面積
＝兩個小半圓的面積和－（大半圓面積－直角三角形面積）
＝直角三角形的面積。

它意味著新月形的面積可以平方化，也就是可以尺規作圖出一個正方形的面積恰為新月形的面積。



（圖十三）

注 1：周髀算經是中國最古老的數學書籍，同時也是一部天文學的著作；是西漢末東漢初（B.C.100～A.D.100 年）結集周秦以來適應天文學上的需要逐漸積累起來的科學研究成果，採用對話一問一答的型式寫成的。

注 2：盧米斯（*Elisha Scott Loomis*）所著的畢氏定理證明（*The Pythagorean Proposition*）一書已在 1927 年出版，書中共提出 250 個證明方法，由英國國立教師協會於 1968 年再版。另數學家傳奇一書中提到約 400 多種。

注 3：參見 99 年翰林國中數學第三冊　1-2 三角形相似性質。

注 4：參見 99 年翰林國中數學第三冊　3-1 幾何推理。