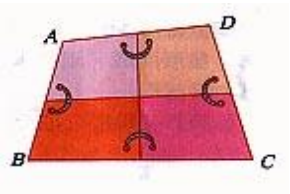
「鴿眼翻轉」



「鴿眼」意指圓圓滾動之眼。

其實「鴿眼翻轉」是中古世紀在歐洲鄉間流行的一種遊戲，

將一個任意的四邊形，在某種條件的約束下，分割成四個四角形。

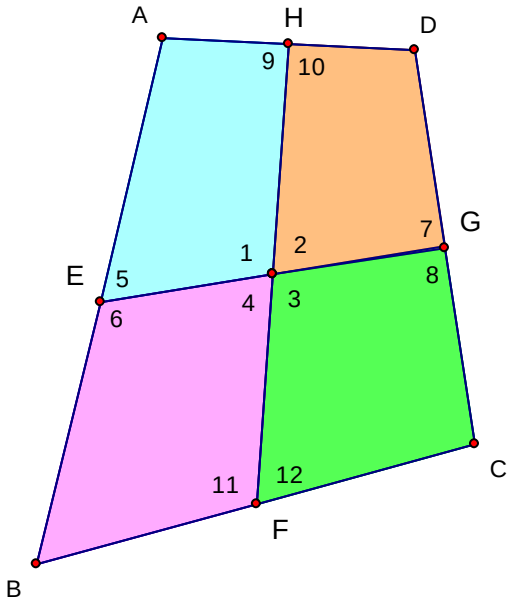
爲了不讓它散掉，要像如圖 1 所示般，打上一個小動(鴿眼)，　　圖一

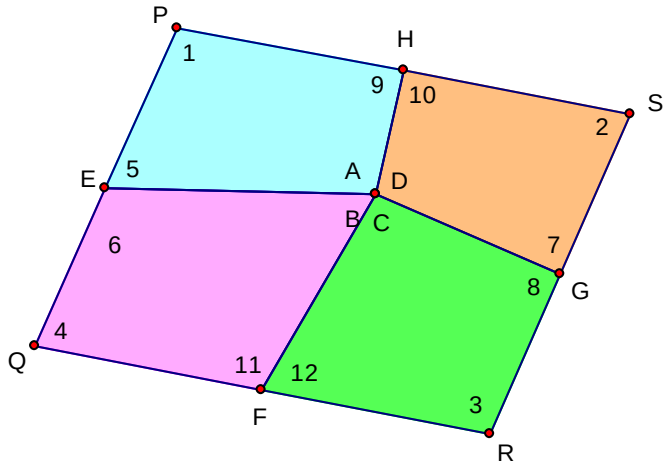
用繩子或橡皮筋綁上，爲了讓 A、B、C、D 四點集中在中央，要將四個四角形翻過來重新排列。「鴿眼」意指圓圓滾動之眼。

一、鴿眼翻轉簡易證明

E、F、G、H分別為四邊中點
連接EG，HF
將四邊形分成四個部分
現在 將這四個四邊形
你可以用這四個圖形拼出平行四邊形嗎？
遊戲方式：可直接拖曳圖形，用方向鍵控制圖形
或是拖曳控制點旋轉圖形，
把四個圖形拼湊成平行四邊形。
翻轉之後，是否還能拼湊出平行四邊形呢？
試著改變原四邊形的形狀，是否還能拼成平行四邊形

翻轉前：　　翻轉後：





證明：

1.翻轉前，∵$ABCD$ 為一個四邊形，∴$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

故在翻轉後，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 就會密合，且頂點會重合

2.翻轉前，∵E、F、G、H 分別為四邊形 $ABCD$ 之中點，

$$\therefore \overline{AE}=\overline{BE}、\overline{BF}=\overline{CF}、\overline{CG}=\overline{DG}、\overline{AH}=\overline{DH}$$

故翻轉後，$\overline{AE}$ 和 $\overline{BE}$、$\overline{BF}$ 和 $\overline{CF}$、$\overline{CG}$ 和 $\overline{DG}$、$\overline{AH}$ 和 $\overline{DH}$ 就會重合

3.翻轉前，$\angle 5+\angle 6=180°$，$\angle 7+\angle 8=180°$，

$\angle 9+\angle 10=180°$，$\angle 11+\angle 12=180°$

翻轉後，$\angle 5+\angle 6=180°$，$\angle 7+\angle 8=180°$，

$\angle 9+\angle 10=180°$，$\angle 11+\angle 12=180°$。依然成立。

即表示可形成一個四邊形。

4.翻轉前，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3+\angle 4=180°$，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$

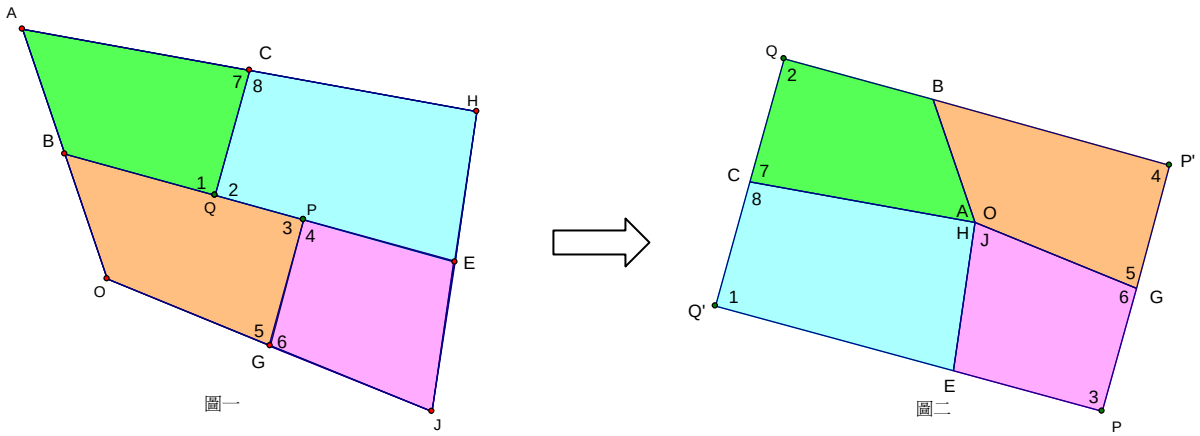
翻轉後，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 3+\angle 4=180°$，$\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$ 依然成立。

再加上 1.2.3.的結論得到：翻轉後的新四邊形 $PQRS$ 其對角相等且鄰角互補。

結論：在四邊形 $PQRS$ 中，∵其對角相等且鄰角互補，∴四邊形 $PQRS$ 為平行四邊形。

二 鴿眼翻轉延伸簡易證明

四邊形AOJH中B、C、G、E分別為四邊中點
連接BE，從C和G分別對BE做垂直線
將四邊形分成四個部分
現在 將這個四邊形
你可以用這四個圖形拼出長方形嗎？



【證明】:

1.在圖一（拼湊前）中，∵$AOJH$ 為一個四邊形，∴$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$

故在圖二（拼湊後）中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 就會密合，且頂點會重合……①

2.在圖一中，∵B、C、G、E 分別為四邊形 $AOJH$ 之中點，

$$\therefore \overline{AB}=\overline{BO}、\overline{OG}=\overline{GJ}、\overline{JE}=\overline{EH}、\overline{AC}=\overline{CH}$$

故在圖二中，$\overline{AC}$、$\overline{AE}$、$\overline{AG}$、$\overline{AB}$ 就會重合……②

3.由①和②可知， $PP'QQ'$ 即為一個四邊形

4.在圖一中，∵$\overline{CQ}\perp\overline{BE}$，$\overline{BE}\perp\overline{PQ}$，∴$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90°$

故在圖二中，$PP'QQ'$ 就是一個長方形……得證

「鴿眼」意指圓圓滾動之眼。

參考文獻 1. 廖菁芬。平面幾何切割問題的學習～鴿眼翻轉的探討。

http://www.hle.com.tw/bookmark/jhs_ma/02/07.htm